Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre, 2005

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

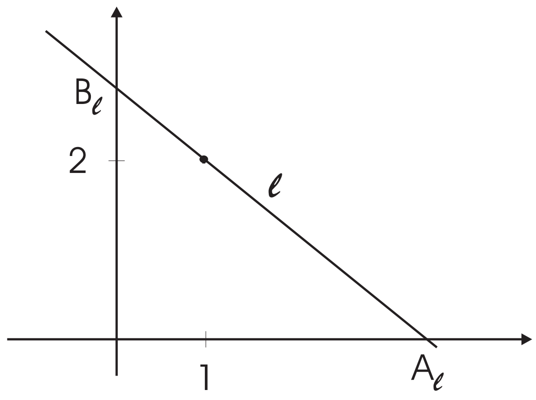
MA-1121-DE HONOR —Segundo Parcial—

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Elija 4 de los ejercicios y diga cuáles son.
De ejercicios 1 y 2 sólo puede elegir uno.
El ejercicio 7 es particularmente difícil.

1. Considere la función
$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$
   a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento
   b) Encuentre los máximos y mínimos locales
   c) Encuentre intervalos de convexidad y concavidad
   d) Determine el comportamiento asintótico de $f(x)$ para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. Encuentre asíntotas si las hay
   e) Dibuje la gráfica aproximada de f, que refleja las conclusiones de a)-d).

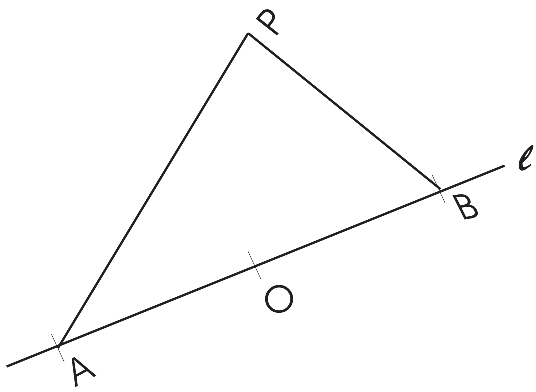
2. Considere la función
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{(x-1)^2}$$
   a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento
   b) Encuentre los máximos y mínimos locales
   c) Encuentre intervalos de convexidad y concavidad
   d) Determine el comportamiento asintótico de $f(x)$ para $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. Encuentre asíntotas si las hay
   e) Dibuje la gráfica aproximada de f, que refleja las conclusiones de a)-d).

3. Considere para cada recta ℓ de pendiente negativa que pasa por $(1, 2)$, sus intersecciones A_ℓ y B_ℓ con los ejes coordenados.
   Demuestre que hay una recta ℓ_0 tal que la longitud del segmento $\overline{A_\ell B_\ell}$, es mínima. Encuentre la recta ℓ_0 y calcule esta mínima longitud.



4. Demuestre que $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ creciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

5. Considere la figura



   donde O está fijo en la recta ℓ y $d(A,O) = d(O,B)$. Suponemos además que P es fijo y no está sobre ℓ. Demuestre que $d(A,P) + d(B,P)$ crece cuando $d(A,B)$ crece.

6. Suponga que u y v son funciones derivables en un intervalo. Suponga además que $uv' - u'v$ no se anula en ningún punto de ese intervalo. Demuestre que que entre dos puntos x_0, x_1 tales que $u(x_0) = 0$ y $u(x_1) = 0$ debe haber una z donde $v(z) = 0$.
   Sugerencia: Piense en la función $\dfrac{u}{v}$ en el intervalo $[x_0, x_1]$

7. Suponga que la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y convexa. Entonces, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $f(x)$ no toma ningún valor negativo.
   Sugerencia: Si toma algún valor negativo, muestre que debe tener un mínimo local y use este resultado.

8. Sea $p(x)$ el polinomio $a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1 + p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

   Antes de hacerlo, verifique que la función $\dfrac{\sqrt[m]{1 + p(x)} - 1}{x}$ está definida en algún entorno reducido de 0.